Devoir commun de Mathématiques

Jeudi 16 mai 2013

****

CORRIGE

****

Exercice 1 (Pondichéry avril 2013) 4 points

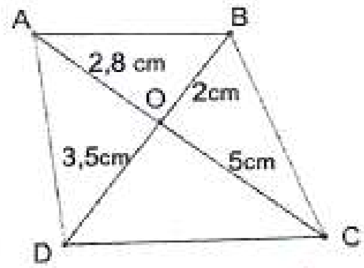
Pour chacune des trois affirmations ci-dessous, indiquer si elle est vraie ou fausse en argumentant la réponse.

Affirmation n° 1 : $(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)$ est un nombre entier.

$(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1) = (\sqrt{5})^2 - 1^2 = 5 - 1 = \boxed{4}$ VRAI

Affirmation n° 2 : 4 n'admet que deux diviseurs.

4 est divisible par 1 ; 2 et 4 FAUX



Affirmation n° 3 : Les droites (AB) et (CD) du quadrilatère sont parallèles.

- $\frac{OA}{OC} = \frac{2,8}{5} = 0,56$
- $\frac{OB}{OD} = \frac{2}{3,5} \neq 0,56$

donc d'après la contraposée de Thalès (AB) et (CD) ne sont pas parallèles.

Exercice 2 (Polynésie juin 2012) 3 points

L'entreprise « Spécialités du Languedoc » vend des boîtes de cassoulet.
Ces dernières sont de forme cylindrique de 12 cm de diamètre et de 5 cm de hauteur.
Elles sont rangées dans un carton de 84 cm de long, 60 cm de large et 5 cm de hauteur de façon à ce qu'elles se calent les unes contre les autres.

1) Combien de boîtes peut-on ranger au maximum dans un carton ?

$\frac{84}{12} = 7$ $\frac{60}{12} = 5$ $7 \times 5 = 35$ On peut ranger 35 boîtes

2) L'entreprise peut-elle ranger dans ce carton des boîtes cylindriques de plus grand diamètre de façon à ce qu'elles se calent les unes contre les autres ? Justifier la réponse

$84 = 60 \times 1 + 24$
$60 = 24 \times 2 + 12$
$24 = 12 \times 2$

donc pgcd(84 ; 60) = 12 (avec l'algo d'Euclide)

On ne peut pas augmenter le diamètre

Exercice 3 (Pondichéry avril 2013) 4 points

On donne la feuille de calcul ci-contre.

La colonne B donne les valeurs de l'expression $2x^2 - 3x - 9$ pour quelques valeurs de x de la colonne A3

1) Si on tape 6 dans la cellule A17, quelle valeur va-t-on obtenir dans la cellule B17 ?

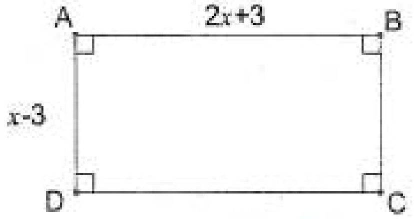
$2 \times 6^2 - 3 \times 6 - 9 = \boxed{45}$ donc B17 va afficher 45.

2) A l'aide du tableur, trouver les deux solutions de l'équation :
$2x^2 - 3x - 9 = 0$

Les deux solutions se lisent en A3 et A12
L'ensemble des solutions est $S = \{-1,5 ; 3\}$

	A	B
	x	$2x^2-3x-9$
1	–2,5	11
2	–2	5
3	–1,5	0
4	–1	–4
5	–0,5	–7
6	0	–9
7	0,5	–10
8	1	–10
9	1,5	–9
10	2	–7
11	2,5	– 4
12	3	0
13	$\boxed{3,5}$	5
14	4	11
15	4,5	18
16	5	26
17		

3) L'unité de longueur est le cm. Donner une valeur de x pour laquelle l'aire du rectangle ci-dessous est égale à 5 cm². Justifier.



$\text{Aire}_{ABCD} = (x-3)(2x+3)$
$= 2x^2 - 6x + 3x - 9$
$= 2x^2 - 3x - 9$

Donc on cherche une valeur de x telle que
$2x^2 - 3x - 9 = 5$
D'après le tableur, x peut être égal à $\boxed{3,5}$

Exercice 4 **(Amérique du sud décembre 2011)** **7 points**

ABC est un triangle rectangle en A tel que CB = 7 cm et AB = 3 cm.
On appelle I le milieu du segment [CB].

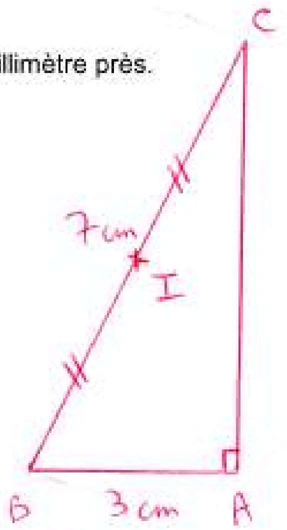
1) Réaliser une figure en vraie grandeur.

2) Calculer la longueur exacte du segment [AC]. En donner la valeur arrondie au millimètre près.

3) Calculer la mesure de l'angle $\widehat{ACB}$ arrondie à 0,1° près.

4) Tracer le cercle circonscrit au triangle ABC. En préciser le centre et le rayon.

5) Calculer la mesure de l'angle $\widehat{AIB}$ au degré près.



1) Voir figure

2) Puisque ABC est rectangle en A,
alors d'après le théorème de Pythagore
$BC^2 = AB^2 + AC^2$
$49 = 9 + AC^2$
$AC^2 = 49 - 9 = 40$
$\boxed{AC = \sqrt{40} \text{ cm}}$

3) Puisque ABC est rectangle en A,
alors $\sin(\widehat{ACB}) = \dfrac{AB}{BC}$
$\sin(\widehat{ACB}) = \dfrac{3}{7}$
donc $\boxed{\widehat{ACB}} = \text{Arcsin}\left(\dfrac{3}{7}\right) \simeq \boxed{25,4°}$

4) Puisque ABC est rectangle en A, le cercle circonscrit a pour centre le milieu de l'hypoténuse [BC] et son rayon est la moitié de BC (soit 3,5 cm)

5) Puisque l'angle au centre $\widehat{AIB}$ et l'angle inscrit $\widehat{ACB}$ interceptent le même arc $\overset{\frown}{AB}$,
alors $\boxed{\widehat{AIB}} = 2 \times \widehat{ACB} \simeq \boxed{51°}$

<u>Exercice 5</u> **(Pondichéry avril 2013)** **6,5 points**

Le poids d'un corps sur un astre dépend de la masse et de l'accélération de la pesanteur.
On peut montrer que la relation est : $\boldsymbol{P = m \times g}$

$\boldsymbol{P}$ est le poids (en Newton, noté N) d'un corps sur un astre (c'est-à-dire la force que l'astre exerce sur le corps),

$\boldsymbol{m}$ la masse (en kg) de ce corps,

$\boldsymbol{g}$ l'accélération de la pesanteur sur cet astre (en $N.kg^{-1}$).

1) Sur la terre, l'accélération de pesanteur de la Terre g_T est environ de 9,8.
Calculer le poids (en N) sur Terre d'un homme ayant une masse de 70 kg.

$\boxed{P} = 70 \times 9,8 = \boxed{686 \text{ N}}$

2) Sur la Lune, la relation $\boldsymbol{P = m \times g}$ est toujours valable.
On donne le tableau ci-dessous de correspondance Poids / Masse sur la Lune :

Masse (en kg)	3	10	25	40	55
Poids (en N)	5,1	17	42,5	68	93,5

a) Est-ce que le tableau ci-dessus est un tableau de proportionnalité ?

$\frac{5,1}{3} = \frac{17}{10} = \frac{42,5}{25} = \frac{68}{40} = \frac{93,5}{55} = \boxed{1,7}$

Donc le tableau est proportionnel (et le coefficient est 1,7)

b) Calculer l'accélération de la pesanteur sur la Lune notée g_L.

$\boxed{g_L} = \frac{P}{m} = \frac{5,1}{3} = \boxed{1,7}$ $(N.kg^{-1})$

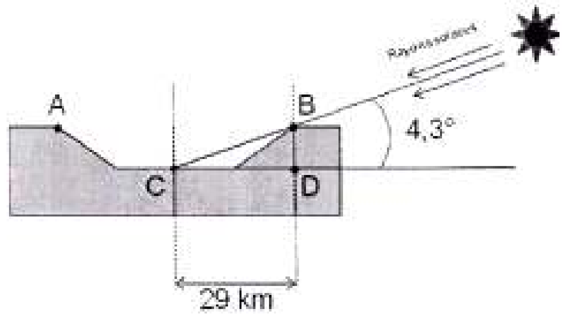
(par exemple car n'importe quelle fraction du tableau peut être utilisée.)

c) Est-il vrai que l'on pèse environ 6 fois moins lourd sur la Lune que sur la Terre ?

soit P_L le poids sur la lune et P_T le poids sur la terre.

$\frac{P_T}{P_L} = \frac{\cancel{m} \times g_T}{\cancel{m} \times g_L} = \frac{g_T}{g_L} = \frac{9,8}{1,7} \simeq \boxed{6}$ donc $\boxed{P_T \simeq 6 \times P_L}$

3) Le dessin ci-dessous représente un cratère de la Lune. BCD est rectangle en D.



La figure n'est pas en vraie grandeur.

a) Calculer la profondeur BD du cratère. Arrondir au dixième de km près.

Puisque BCD est rectangle en D, alors $\tan(\widehat{BCD}) = \frac{BD}{CD}$

$\tan(4,3) = \frac{BD}{29}$

$\boxed{BD} = 29 \times \tan(4,3)$

$\simeq \boxed{2,2 \text{ km}}$

b) On considère que la longueur CD représente 20 % du diamètre du cratère.
Calculer la longueur AB du diamètre du cratère.

$100\,\% = 5 \times 20\,\%$

AB est donc 5 fois plus grand que CD.

$\boxed{AB} = 5 \times 29 = \boxed{145 \text{ km}}$

Exercice 6 (Liban 2010) **6 points**

Compléter le tableau donné en annexe (page 5).

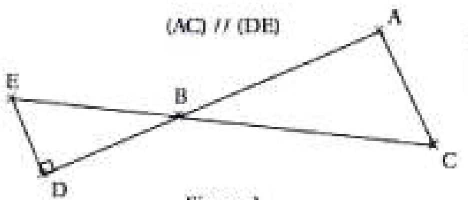


Figure 1

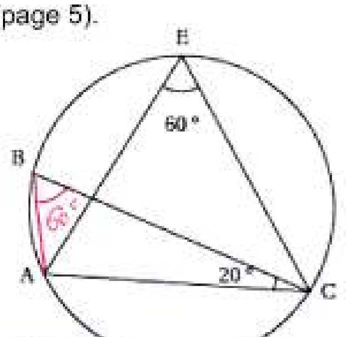


Figure 2

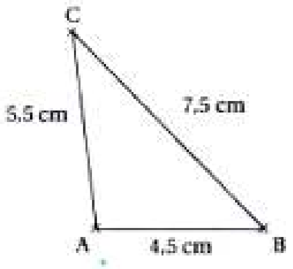
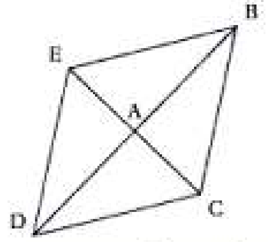


Figure 3



BCDE est un losange de centre A

Figure 4

	Figure 1	Figure 2	Figure 3	Figure 4
Le triangle ABC est-il rectangle en A ?	☒ Oui ☐ Non	☐ Oui ☒ Non	☐ Oui ☒ Non	☒ Oui ☐ Non
Numéro(s) de la ou des propriétés permettant de le prouver.	5	7 et 4	3	1

Liste des propriétés :

1) *Si un quadrilatère est un losange, alors ses diagonales ont le même milieu et sont perpendiculaires.*
2) *Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième, alors elles sont parallèles entre elles.*
3) *Si dans un triangle, le carré de la longueur du plus grand côté n'est pas égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, alors ce triangle n'est pas rectangle.*
4) *Dans un triangle, la somme des mesures des trois angles est égale à 180 °.*
5) *Si deux droites sont parallèles et si une troisième est perpendiculaire à l'une, alors elle est perpendiculaire à l'autre.*
6) *Si un quadrilatère a ses quatre côtés de même longueur, alors c'est un losange.*
7) *Si deux angles inscrits dans un cercle interceptent le même arc, alors ils ont la même mesure.*
8) *Si dans un triangle, le carré de la longueur du plus grand côté est égal à la somme des carrés des longueurs des autres côtés, alors ce triangle est rectangle et l'angle droit est l'angle opposé au plus grand côté.*

Exercice 7 (Amérique du Nord juin 2010) **8 points**

M. Dubois réfléchit à son déménagement. Il a fait réaliser deux devis :

1) L'entreprise A lui a communiqué le graphique présenté en annexe.
Celui-ci représente le coût du déménagement en fonction du volume à transporter.

a) Quel serait le coût pour un volume de 20 m³ ? Vous laisserez vos tracés apparents. $\boxed{600 €}$

b) Le coût est-il proportionnel au volume transporté ? Justifier.

Puisque ~~la~~ la courbe est une droite qui passe par l'origine du repère alors le coût est proportionnel au volume.

c) Soit g la fonction qui à x, volume à déménager en m³, associe le coût du déménagement avec cette entreprise. Parmi les quatre expressions littérales suivantes, écrire sur votre copie celle qui exprime $g(x)$ en fonction de x : $g(0) = 0$ et $g(20) = 600$ donc $g(x) = 30x$.

- $g(x) = x + 30$
- $g(x) = 30x$
- $g(x) = 30x^2$
- $g(x) = 10x + 300$

2) L'entreprise B lui a communiqué une formule : $f(x) = 10x + 800$ où x est le volume (en m³) à transporter et $f(x)$ le prix à payer (en €).

a) Calculer $f(80)$. Que signifie le résultat obtenu ?

$\boxed{f(80)} = 10 \times 80 + 800 = \boxed{1600}$ 80 m³ coûtent 1600 €

b) Déterminer par le calcul l'antécédent de 3 500 par la fonction f.

$f(x) = 3500$ $10x + 800 = 3500$ $10x = 2700$ $\boxed{x = 270}$

c) Représenter graphiquement la fonction f sur le graphique présenté en annexe.

$f(0) = 800$ et $f(80) = 1600$ donc la droite passe par $(0 ; 800)$ et $(80 ; 1600)$

3) M. Dubois estime à 60 m³ le volume de son déménagement. Aidez-le à choisir l'entreprise la moins chère en justifiant votre démarche (qu'elle soit graphique ou numérique).

Graphiquement, on paye 1400€ avec la société B pour 60 m³ (et 1800€ pour la société A)

Donc il vaut mieux choisir la B.